Chapitre 3 : Théorème du moment cinétique

1. Moment cinétique d'un point matériel

1.1. Vecteur moment cinétique par rapport à un point

Soit un point M de masse m animé d'un mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$. On définit le moment cinétique dans ce référentiel du point M par rapport à un point O par le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$$

Le moment cinétique dépend de la vitesse et donc du référentiel d'étude. Par définition, on a $\overrightarrow{L_O} \perp \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}\right)$.

1.2. Moment cinétique scalaire par rapport à un axe

Soit un axe $(\Delta) = \left(O, \overrightarrow{u_\Delta}\right)$. On définit le moment cinétique du point M par rapport à l'axe (Δ) comme la projection du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ sur (Δ) :

$$L_{(\Delta)} = \overrightarrow{L_O}.\overrightarrow{u_\Delta}$$

Tout comme $\overrightarrow{L_O}$, $L_{(\Delta)}$ dépend du référentiel d'étude.

1.3 Cas particulier du mouvement circulaire

Soit un point M animé d'un mouvement de translation circulaire de rayon R autour d'un point O. Le référentiel d'étude est défini avec pour origine le centre O et par le trièdre de coordonnées cylindriques $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$, le plan $\left(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$ étant le plan de la trajectoire du point M considéré.
On a alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

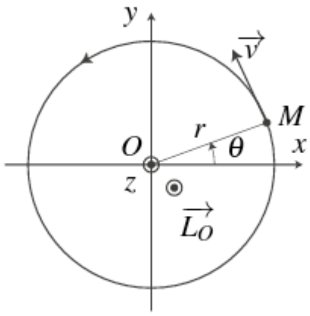
Soit

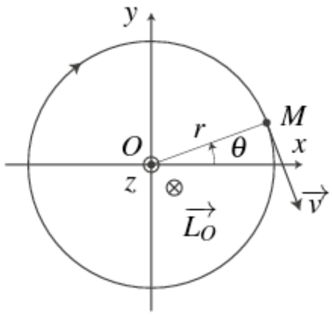
$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{M/R}} = mR\overrightarrow{u_r} \wedge R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = mR^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$$

Le signe du moment cinétique permet ainsi de connaître le sens du mouvement de révolution du point M autour de O.
En effet, on a :

- mouvement dans le sens trigonométrique : $\dot{\theta} > 0$ donc $\overrightarrow{L_O}$ dans le sens de $\overrightarrow{u_z}$
- mouvement dans le sens horaire : $\dot{\theta} < 0$ donc $\overrightarrow{L_O}$ dans le sens opposé de $\overrightarrow{u_z}$

Remarque : quelque soit le cas considéré, la trajectoire s'enroule dans le sens direct autour de l'axe $\left(O, \overrightarrow{L_O}\right)$ (règle du tire-bouchon)





2. Moment d'une force

2.1. Moment vectoriel d'une force par rapport à un point

Soit un point M auquel est appliquée une force $\vec{f}$. Soit O un point de l'espace. On définit le moment de la force $\vec{f}$ en O par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

L'unité du moment d'une force est donc le $N.m$.

Par définition, on a $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) \perp \left(\overrightarrow{OM}, \vec{f}\right)$.

On remarque que si la force $\vec{f}$ est suivant $\overrightarrow{OM}$ alors le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = \vec{0}$

Le sens physique du moment est d'indiquer comment la force va faire tourner le point M autour du point O.

On peut également remarquer que le moment est une grandeur additive.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f_1} + \vec{f_2}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{f_1} + \vec{f_2}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{f_1}\right) + \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{f_2}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f_1}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f_2}\right)$$

2.2. Moment scalaire d'une force par rapport à un axe

Soit un axe $(\Delta) = \left(O, \overrightarrow{u_\Delta}\right)$. On définit le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à cet axe par :

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}\right).\overrightarrow{u_\Delta}$$

Prenons le cas du calcul en coordonnées cylindro-polaires en choisissant $(\Delta) = \left(O, \overrightarrow{u_z}\right)$. On a :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \; ; \; \vec{f} = \begin{vmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{vmatrix}$$

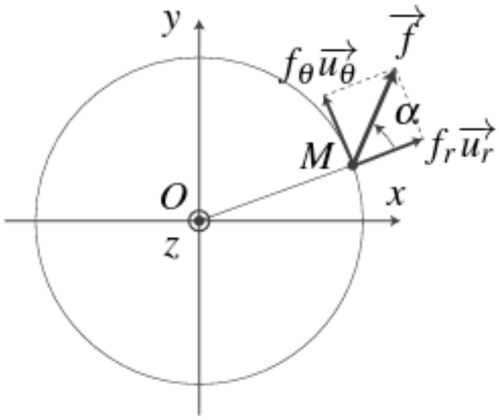
et donc

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}\right).\overrightarrow{u_z} = \left(\begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{vmatrix}\right) . \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z f_\theta \\ z f_r - r f_z \\ r f_\theta \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = r f_\theta$$

On peut alors remarquer que l'on a que $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})=0$:

- si la force $\vec{f}$ est parallèle à l'axe ($f_r = f_\theta = 0$)
- si M est un point de l'axe (Δ)
- si la droite d'action de la force (droite passant par M dirigée suivant $\vec{f}$) passe par l'axe (Δ) c'est-à-dire par le point O (ce qui revient à $f_\theta = 0$)

Étant donné que ni la composante de la force ni celle du vecteur position suivant l'axe (Oz) n'interviennent dans le calcul, on représente la situation en se restreignant au plan (xOy) (ce qui revient à considérer ici que $f_z = 0$)



On obtient alors :

$$f_\theta = \left\|\vec{f}\right\|\sin(\alpha)$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = rf_\theta = r\left\|\vec{f}\right\|\sin(\alpha)$$

On constate que :

- si $\alpha \in]0\,;\pi[$ alors $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) > 0$: $\vec{f}$ tend à faire bouger le point M dans le sens direct autour de (Δ)
- si $\alpha \in]-\pi\,;0[$ alors $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) < 0$: $\vec{f}$ tend à faire bouger le point M dans le sens indirect autour de (Δ)

Exercice : Soit un point M de masse m, dont on repère la position par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z). Ce point est soumis au champ de pesanteur terrestre. Calculer le moment du poids par rapport à l'origine O, puis le moment scalaire par rapport à l'axe vertical (Oz). Conclure.

Correction : on a

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \; ; \; \vec{P} = m\vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix}$$

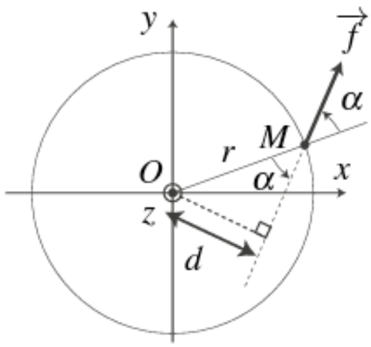
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{P}\right)=\begin{vmatrix}-y\times mg\\x\times mg\\0\end{vmatrix}\ ;\ \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{P}\right)=\begin{vmatrix}-y\times mg\\x\times mg\\0\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}=0$$

Il est logique de retrouver un moment scalaire nul suivant l'axe vertical puisque le poids est dirigé suivant $-\overrightarrow{u_z}$.

Le poids ne peut donc induire aucune courbure de la trajectoire du point M autour de l'axe vertical (Oz).

2.3. Notion de bras de levier

On appelle bras de levier la distance d séparant l'axe (Δ) de la droite $\left(M,\vec{f}\right)$.



On a alors :

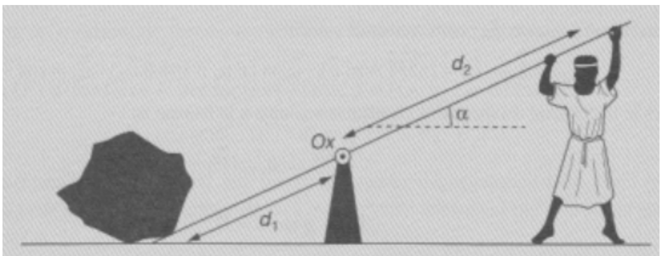
$$\left|\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}\right)\right|=\left\|\vec{f}\right\|\times d$$

En effet, on a bien :

$$d=r\sin(\alpha)$$

On retrouve ainsi que si la droite d'action de $\vec{f}$ passe par l'axe (Δ) ou si $M\in(\Delta)$ alors $d=0$ et le moment scalaire est nul.

Exercice : Archimède a dit : « Donnez moi un point d'appui, un levier suffisamment long et je soulèverai le monde ! ». Pour le prouver, Archimède veut soulever à l'aide d'un levier de longueur $L=2\ m$ un rocher assimilé ici à un point de masse $M=200\ kg$.



On admet que le rocher commence à se soulever lorsque les moments par rapport à l'axe (Ox) du poids du rocher et de la force exercée par Archimède sont opposés. Sachant que $m=70\ kg$ est la masse d'Archimède, où ce dernier doit-il placer son point d'appui ?

Correction : on a

$$\left|\mathcal{M}_{(Ox)}\left(\overrightarrow{P_{Rocher}}\right)\right| = Mgd_1\cos(\alpha) \text{ et } \left|\mathcal{M}_{(Ox)}\left(\overrightarrow{P_{Archimède}}\right)\right| = mgd_2\cos(\alpha) = mg(L-d_1)\cos(\alpha)$$

Le rocher se soulève pour si

$$Mgd_1\cos(\alpha) = mg(L-d_1)\cos(\alpha)$$

Soit :

$$d_1 = \frac{mL}{m+M} \text{ et } d_2 = \frac{ML}{m+M}$$

Le point d'appui doit donc être confondu avec le barycentre des masses affectées aux extrémités du levier.

On trouve numériquement :

$$d_1 = 0{,}5\ m \text{ et } d_2 = 1{,}5\ m$$

3. Théorème du moment cinétique pour un point matériel

3.1. Énoncé et démonstration

Soit un point M de masse m animé d'un mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. La dérivée du moment cinétique est égale au moment de la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées au point M, c'est-à-dire à la somme des moments des forces appliquées à M.

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right)$$

Démonstration : on a

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}\right)$$

Or, d'après la deuxième loi de Newton, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}\right) = \vec{F}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \parallel \overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}$$

Ainsi, on obtient bien :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right)$$

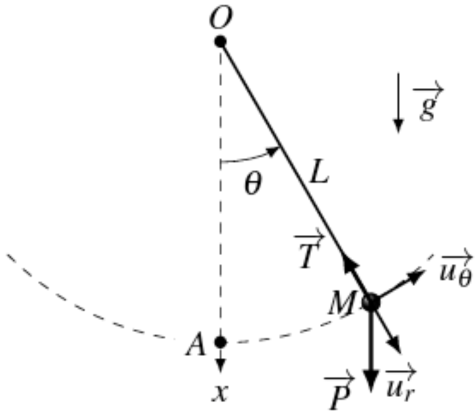
L'énoncé précédent correspond au théorème du moment cinétique par rapport à un point O.

Par projection sur un axe (Δ), on obtient une autre formulation faisant intervenir le moment cinétique par rapport à l'axe considéré.

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}.\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right).\overrightarrow{u_\Delta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}\right)$$

3.2. Exemple d'application : le pendule simple

On reprend le cas d'un pendule simple.



Système : point M
Référentiel : terrestre galiléen
B.A.M.E :

- tension du fil $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$
- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{u_x} = mg\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - mg\sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

On commence par calculer les moments des différentes forces. On obtient :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{T}\right) = l\overrightarrow{u_r} \wedge (-T)\overrightarrow{u_r} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{P}\right) = l\overrightarrow{u_r} \wedge \left(mg\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - mg\sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}\right) = -mgl\sin(\theta)\overrightarrow{u_z}$$

$\overrightarrow{u_z}$ étant le vecteur perpendiculaire au plan de la figure et venant vers nous.

L'extrémité du pendule décrit un mouvement d'arc de cercle, ainsi on a :

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Soit :

$$\overrightarrow{L_O} = l\overrightarrow{u_r} \wedge ml\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} \text{ et } \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

L'écriture du théorème du moment cinétique fournit l'équation :

$$ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z} = -mgl\sin(\theta)\overrightarrow{u_z}$$

Par projection sur l'axe (Oz), on obtient l'équation :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$